Risolviamo la equazione differenziale $y^{''} + 4y = f(t)$ con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases}$ $\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} dt\ e^{-pt} f(t) = \int_0^{\pi} dt\ e^{-pt} = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p} \doteq F(p)$.

Inoltre $\mathcal{L}(y^{''} + 4y) = p\mathcal{L}(y') - y'(0) + 4\mathcal{L}(y) = p\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) + 4\mathcal{L}(y) = p^2\mathcal{L}(y) - p + 4\mathcal{L}(y) = F(p)$ ossia $\mathcal{L}(p) = \frac{F(p)+p}{p^2+4}$. $y(t) = v.p. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp\ e^{pt} \frac{1 + p^2 - e^{-p\pi}}{p(p^2+4)} = v.p. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp\ \frac{-e^{p(t-\pi)}}{p(p^2+4)} + v.p. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp\ e^{pt} \frac{1+p^2}{p(p^2+4)} \doteq v.p. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_o - i\infty}^{a_o + i\infty} dp\ (Q_1(p) + Q_2(p)$ e $a_o > 0$. Si ottiene $y(p) = (ResQ_1(0) + ResQ_1(ip) + ResQ_1(-ip))H(t-\pi) + (ResQ_2(0) + ResQ_2(ip) + ResQ_2(-ip))H(t)$

$$(ResQ_1(0) + ResQ_1(ip) + ResQ_1(-ip)) == \frac{1}{4} + \frac{e^{2i(t-\pi)}}{(2i)(4i)} + \frac{e^{-2i(t-\pi)}}{(-2i)(-4i)} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2t)\right) H(t-\pi)$$

$$(ResQ_2(0) + ResQ_2(ip) + ResQ_2(-ip)) == \frac{1}{4} + \frac{-3e^{2it}}{(2i)(4i)} + \frac{-3e^{-2it}}{(-2i)(-4i)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2t)\right) H(t)$$

Alla fine la soluzione è $\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2t)\right) H(t-\pi) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2t)\right) H(t)$

Si può verificare che per $0 \le t < \pi$ la soluzione è $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2t)$ e soddisfa l'equazione $y^{''} + 4y = 1$ condizioni iniziali comprese. Per $t > \pi$ la soluzione diventa $\cos(2t)$ e soddisfa l'equazione differenziale $y^{''} + 4y = 0$ condizioni iniziali comprese.